L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 37A N.3
MAGGIO 2014

Poste Italiane s.p.a.
Spedizione in Abbonamento Postale
D.L. 353/2003 - (conv. In L. 27/02/2004 n° 46)
art. 1, comma 1, NE/PD - Rivista mensile
Tiratura inferiore a 20.000 copie - Taxe Perçue

Organo del
CENTRO
RICERCHE
DIDATTICHE
UGO MORIN

Via S. Giacomo, 4
31017 Paderno del Gr. (TV)

Trattamento dello zero nel Progetto PerContare

Anna Baccaglini-Frank

Sommario

Il progetto "PerContare" è volto a costruire, e a mettere a disposizione di insegnanti e scuole, materiali e strumenti didattici per offrire a tutti i bambini strumenti cognitivi adeguati per lo sviluppo delle competenze numeriche. In questo contributo cercheremo di chiarire l'approccio proposto all'interno del progetto rispetto all'introduzione dello zero all'inizio della scuola primaria. Più specificatamente, presenteremo i diversi significati dello zero che vengono affrontanti nella didattica proposta nel progetto, e come questi vengano affrontati usando diverse rappresentazioni, e in particolare diverse rappresentazioni della linea dei numeri.

Abstract

The "PerContare" project aims at designing didactical materials for primary school teachers to offer all students appropriate cognitive tools for the development of their numerical abilities. In this paper we will discuss the project's approach to the teaching and learning of "zero" at the beginning of primary school. We will present the different meanings of "zero" that are proposed in the project, and how these are addressed using different representations, and in particular different representations of the number line.

Trattamento dello zero nel Progetto PerContare

Anna Baccaglini-Frank[1]

1. Introduzione

Con una didattica della matematica non rivolta alla prevenzione delle difficoltà di apprendimento (Ianniti & Lucangeli, 2005; Lucangeli, 2005), cioè poco attenta agli aspetti semantici, lessicali, sintattici e procedurali dell'aritmetica, e ad aspetti affettivi (Zan, 2007), sin dalle prime classi della scuola primaria può accadere che bambini competenti in altri ambiti disciplinari non sviluppino una sufficiente padronanza delle operazioni di calcolo e del processamento numerico. Molti di questi bambini, pur non avendo un vero disturbo specifico dell'apprendimento ed in particolare la discalculia evolutiva (DE) (Butterworth, 1999, 2005; Dehaene, 2010), possono sviluppare profili prestazionali del tutto simili a bambini con un vero deficit. Per dare una risposta alle esigenze sempre più emergenti su questo tema, è nato il progetto PerContare[2], con referenti scientifici dall'ambito della didattica della matematica (M.G. Bartolini Bussi), e della psicologia cognitiva (G. Stella). Il progetto è volto a costruire, e a mettere a disposizione di insegnanti e scuole, materiali e strumenti didattici per offrire a tutti i bambini strumenti cognitivi adeguati per lo

[1] Dipartimento di Educazione e Scienze Umane – Università di Modena e Reggio Emilia

[2] Il progetto Per Contare (2011-2014) è diretto dalla Fondazione ASPHI onlus, con la supervisione scientifica dell'Università di Modena e Reggio Emilia, e con il supporto della Compagnia di San Paolo e della Fondazione per la Scuola della Compagnia di San Paolo. Per ulteriori informazioni si veda il sito: percontare.asphi.it

sviluppo delle competenze numeriche. Questi materiali e gli strumenti didattici utilizzano sia le potenzialità dell'informatica, sia artefatti non digitali di supporto alla didattica.
In questo contributo cercheremo di chiarire l'approccio proposto all'interno del progetto PerContare rispetto all'introduzione dello zero all'inizio della scuola primaria. Più specificatamente, presenteremo i diversi significati dello zero che vengono affrontanti nella didattica proposta nel progetto, e come questi vengano affrontati usando diverse rappresentazioni, e in particolare diverse rappresentazioni della linea dei numeri. Tali rappresentazioni, come tutte le rappresentazioni in matematica, non coincidono con il concetto nella sua complessa totalità, ma corrispondono a suoi aspetti, che eventualmente con l'esperienza dovranno essere messi in relazione tra loro, elaborati, e richiamati nella forma più appropriata nel momento del bisogno.

2. Complessità cognitiva dello zero

Come si può leggere nel primo capitolo del *Handbook of Mathematical Cognition* (2005), dati da studi sullo sviluppo (Hughes, 1986) indicano che imparare la sequenza di numeri (1 – 9) sia in generale non-problematico. Lo zero invece sembra causare più difficoltà (Wellman & Miller, 1986), ma non sono ancora del tutto chiare le ragioni. Dagli studi emerge che solo per leggere lo zero, come cifra, all'interno di numeri sono richiesti negli adulti tempi eccezionalmente lunghi (Brysbaert, 1995); inoltre, nella scrittura di numeri a più cifre, lo zero causa particolari difficoltà. Per i bambini queste difficoltà portano ad errori nella scrittura dei numeri che hanno zeri interposti tra altre cifre, e quando devono scrivere "0" i bambini spesso eseguono movimenti differenti rispetto a quando scrivono le altre cifre (Lochy, Pillon Zesiger, & Seron, 2002). Le difficoltà più significative nella gestione delle cifre arabe e dello 0 in particolare riguardano l'uso della notazione posizionale e, in particolare, il fatto che il valore di una cifra cambi in base alla posizione che occupa all'interno di un numero (p.e. 1

può valere un'unità, ma anche una decina, un centinaio, ecc.). Anche in pazienti con lesioni cerebrali, lo zero è oggetto di errori selettivi rispetto al ruolo sintattico o lessicale che assume nel numero (Granà, Lochy, Girelli, Seron, & Semenza, 2003). Il fatto, poi, che lo zero come numero significhi la "non presenza" dell'oggetto di riferimento, e quindi una "non-quantità" può essere fonte di ulteriori difficoltà a livello semantico.

Dunque è assodato che la gestione dello zero sia cognitivamente più complessa che la gestione degli altri numeri e che questo possa portare ad una serie di difficoltà nel suo uso nella lettura e nella scrittura del codice arabo (Dehaene, 1992). Vediamo ora, rispetto ai contenuti aritmetici delle prime classi della scuola primaria, quali aspetti dello zero siano da prendere in considerazione.
Ricordiamo qui che il progetto PerContare propone delle pratiche di "buona didattica" della matematica (Baccaglini-Frank e Robotti, 2013; Baccaglini-Frank e Scorza, 2013) per la classe intera, facendo particolare attenzione ai bambini con difficoltà d'apprendimento, ma senza dimenticare gli altri bambini, anche quelli con prestazioni alte. Questo è un bisogno quanto mai impellente in un contesto come quello italiano in cui le classi accolgono bambini con caratteristiche cognitive e bisogni educativi differenti tra loro. Per questo, da un lato le attività proposte nel progetto sono particolarmente attente ad evitare fattori che possono aumentare le difficoltà individuali di apprendimento, e dall'altro hanno come obiettivo didattico quello di aiutare tutti i bambini della classe a costruire solidi significati matematici, secondo le normative ministeriali. Dunque vengono avanzate proposte che potrebbero essere utilizzate, con piccoli adattamenti, anche in un lavoro individuale di potenziamento (Biancardi, Lucangeli, 2010; Biancardi et al., 2011; Lucangeli, 2012), ma che generalmente sono concepite per la classe intera, consentendo a tutti i bambini di affrontare situazioni cognitivamente appaganti e fonte di "nuovo Sapere" (Bartolini Bussi e Mariotti, 2009). Tipicamente cerchiamo di costruire le attività in modo che abbiano una "soglia bassa" e un

"soffitto alto" perché tutti i bambini possano trovare modo di essere ingaggiati e perché ciascuno possa vincere delle piccole sfide cognitive, lavorando nella sua zona di sviluppo prossimale (Vygotsky, 1987).
Rispetto all'introduzione dello zero, questo significa che le attività eviteranno inutili appesantimenti cognitivi che possono sfociare in errori nei bambini più in difficoltà, ma non trascureranno la delicata questione dello zero: affronteranno, in maniera graduale, la sua introduzione come segno ("0") con un particolare significato prima come semplice segnaposto nella addizione e sottrazione (anche informali) sulla linea dei numeri, e poi come quantità nulla o "non-considerazione di oggetti che prima erano stati considerati" (p.e., "nessun dito alzato", o "nessun oggetto rimasto").

3. Numeri per Contare

Inizialmente, l'uso dei numeri (in un primo momento solo le nove cifre 1 – 9) riguarda processi di conteggio, e l'associazione di quantità (analogiche) ai simboli del codice arabo e alle parole-numero del codice verbale. Per l'acquisizione di tali aspetti dei numeri, riteniamo che non sia utile introdurre alcuna rappresentazione dello zero. Infatti, se nel contare oggetti si fa partire la filastrocca dei numeri da 0, facendo corrispondere la parola "zero" al primo oggetto contato, si incorre in errori perché l'ultima parola-numero pronunciata, anche nel caso in cui i principi del conteggio (Gelman & Gallistel, 1978) siano rispettati, non corrisponderà alla numerosità dell'insieme degli oggetti considerati.
In questa prima fase, aggiungere a sequenze di numeri (magari quelli appesi nell'aula, come prima rappresentazione della linea dei numeri in formato discreto[3]) la rappresentazione dello zero come quantità nulla, non sembra particolarmente utile, e per molti bambini sembra anzi essere fonte di errori nei processi di conteggio, come descritto sopra.

[3] Tipo le caselle del gioco dell'oca.

Quando viene introdotta la decina[4] e la sua rappresentazione nel codice arabo, si può semplicemente proporre la scrittura del numero "10" come "pacchetto unico" e proporne un'analisi della struttura sintattica soltanto in un secondo momento quando si affronta esplicitamente il valore posizionale delle cifre nel nostro sistema numerico. È possibile imparare a pronunciare e a scrivere anche numeri oltre il 10 (in genere nella prima classe si arriva almeno al 20), come "fatti", per tentativi ed errori, senza un'analisi esplicita della sintassi usata, per ricavarla eventualmente come meta-riflessione sui fatti appresi.
Vi sono moltissime attività da proporre con i numeri entro il 10 (e senza affrontare lo zero) per sviluppare competenza nella loro gestione semantica e simbolica. Proponiamo in particolare un uso abbondante delle dita alzate e abbassate per rappresentare i numeri ed eseguire diversi tipi di calcolo, per passare in un secondo momento alle cannucce e fascetti-decina di cannucce (Ramploud, Baccaglini-Frank e Bartolini Bussi, in corso di stampa). La "quantità nulla", nella fase iniziale, viene gestita soltanto implicitamente come configurazione delle dita di una mano: tutte le dita abbassate. Questa nozione viene proposta in attività in cui l'insegnante propone degli indovinelli con le dita, nascondendole dietro la schiena. La stessa attività viene proposta da un personaggio virtuale, Betta Coniglietta[5], che, tra gli indovinelli, può proporre: "Ho … dita di una mano sollevate e tutte le dita dell'altra mano abbassate. Che numero è?" oppure "Non ho nessun dito sollevato in una mano e ho … dita sollevate nell'altra. Quante dita sono sollevate?", o ancora "Non ho nessun dito sollevato in una mano e ho … dita abbassate nell'altra. Quante dita sono sollevate?"
In una prima fase, in una situazione in cui tutte le dita sono abbassate, non si chiederà "che numero è?" ma se proprio si vuole

[4] PerContare propone di introdurre questa nozione come "tutte le dita delle mani" e come fascetto di 10 cannucce legate con un elastico.

[5] Il software è stato sviluppato da Ivana Sacchi per il progetto PerContare.

proporre la situazione, si può chiedere "quante dita sono sollevate?" e aspettarsi come risposta "nessuno". Quando sarà stato affrontato il significato di zero come quantità nulla o "non-considerazione di oggetti che prima erano stati considerati", ci si potrà aspettare "zero" come risposta in situazioni come quest'ultima. A questo punto i bambini potranno interagire con il software anche da soli, immettendo le risposte da tastiera e quindi usando le cifre da 0 a 9 per rappresentare i numeri (anche il 10 e lo 0) degli indovinelli di Betta.

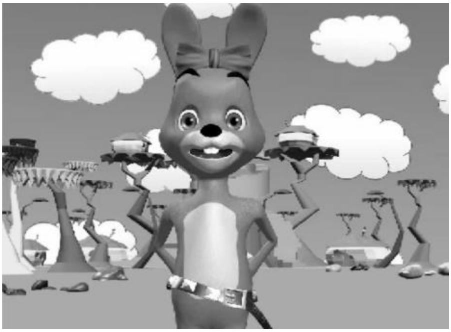


Figura 1: Betta coniglietta che propone giochi con le dita.

Oltre alla rappresentazione e manipolazione dei numeri con le mani e con le cannucce, il progetto propone un'altra rappresentazione dei numeri, linea dei numeri, che viene utilizzata per aiutare i bambini a identificare relazioni ordinali tra i numeri e poi come ulteriore strumento per aiutarli nel calcolo.

4. La linea dei numeri per relazioni ordinali tra i numeri

La linea dei numeri sembra corrispondere ad una rappresentazione intuitiva e ad una traduzione naturale della sequenza in una dimensione spaziale (Pinel et al., 2004; Seron et al., 1992). Il modello della linea dei numeri trova conferma in vari effetti comportamentali come l'effetto SNARC (Spatial Numerical Association of Response Codes) usato per documentare l'effetto dello spazio sulla rappresentazione dei numeri (Dehaene, Bossini, e Giraux, 1993). L'effetto riflette un vantaggio nei tempi di risposta sui numeri piccoli (1-5) quando le risposte vengono date dal soggetto[6] con la mano sinistra e un vantaggio nei temi di risposta con la mano destra sui numeri più grandi (5-9). L'effetto è stato misurato nei seguenti tipi di consegna riguardanti i numeri da 1 a 9: comparazione, giudizio di parità, ordinamento (de Hevia, et al., 2008; Dehaene, et al., 1993; Hubbard, et al., 2005). Il modello mentale della linea dei numeri costituisce al tempo stesso una forma più astratta di rappresentazione rispetto al conteggio degli oggetti, in quanto avvia la possibilità di contare qualsiasi elemento, introducendo in qualche misura un principio di astrazione, uno dei principi universali del numero richiamati da Gelman e Gallistel (1978). Dunque la linea dei numeri sembra essere una sorta di "vincolo nell'elaborazione numerica" (Biancardi, comunicazione privata), tuttavia sembra che la rappresentazione della linea dei numeri evolva con lo sviluppo cognitivo del soggetto, anche in seguito alle influenze culturali (Zorzi et al., 2002), e che dunque un'appropriata esposizione porti ad una migliore rappresentazione e conseguente elaborazione numerica. Infatti, per esempio, nello sviluppo normale, la rappresentazione iniziale elaborata dal bambino della linea dei numeri sembra essere di tipo logaritmico, con i numeri più "piccoli" più distanziati e quelli "grandi" sempre

[6] I tempi di risposta in questo caso riguardano soggetti che appartengono a culture occidentali in cui si legge da sinistra a destra.

più vicini. Questa rappresentazione, con gli anni di esposizione scolastica, si evolve verso quella "matematica" in cui i numeri sono disposti in maniera lineare. Per questo riteniamo fondamentale, per un buon sviluppo dell'elaborazione numerica, che la didattica scolastica proponga un'esposizione appropriata a rappresentazioni della linea dei numeri.
Una buona rappresentazione mentale della linea dei numeri consente un accesso rapido ed efficace alle informazioni numeriche necessarie per moltissimi compiti sia numerici che aritmetici. Alcune ricerche (Dehaene, 2001; Okamoto e Case, 1996; Verguts e Fias, 2004;) suggeriscono che l'uso della linea numerica visiva, come rappresentazione esterna di supporto, favorisce la manipolazione di quantità e l'acquisizione e costruzione di concetti e procedure matematiche di alto livello. La linea dei numeri può, per esempio, facilitare il compito di identificare quale numero segue o precede un altro e in generale di identificare relazioni ordinali tra i numeri. Risulta pertanto utile fornire ai bambini esperienze concrete con la linea dei numeri al fine di favorire l'acquisizione e implementazione delle competenze numeriche e aritmetiche di base (Siegler e Ramani, 2009).

Prima di arrivare al calcolo, e in generale nelle attività che hanno come obiettivo l'identificazione di relazioni ordinali tra i numeri, la linea viene proposta come linea continua con tacche in corrispondenza dei numeri della filastrocca "uno, due, tre,…dieci".

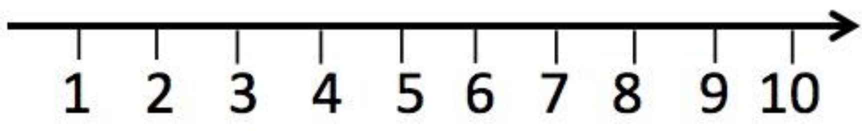


Figura 2: rappresentazione della linea dei numeri per attività che hanno come obiettivo didattico l'identificazione di relazioni ordinali tra i numeri.

Il fatto che la linea prosegua (fino a poco prima di dove starebbe la tacca dello zero) alla sinistra della tacca “1” e a destra del “10” suggerisce (ma non occorre esplicitare questa riflessione se i bambini non la notano) che ci possano essere altri numeri. Inoltre, è possibile esplicitare con più facilità analogie con il righello o con il metro, quando eventualmente si affronteranno questi temi.
Proponiamo da subito la rappresentazione continua della linea per evitare troppe variazioni della rappresentazione, evitando così ai bambini con difficoltà l’ulteriore fatica (non didatticamente utile in questo caso) di passare da una rappresentazione all’altra nel corso della sua vita scolastica. La linea continua è la rappresentazione a cui si mira nella cultura matematica, perché i suoi punti possono essere messi in corrispondenza con i numeri reali. Inoltre, la linea continua a tacche può essere usata per l’introduzione della misurazione della lunghezza (infatti è la rappresentazione usata anche nel righello e nel metro). Come uniche rappresentazioni discrete, proponiamo attività di movimento fisico in cui si usano le scale o delle gradinate numerate (con l’uno sul primo gradino che s’incontra), soprattutto in casi di grave difficoltà, oppure dei cerchi in palestra disposti per terra sequenzialmente. Sia con le scale che con i cerchi i bambini possono interagire spostandosi fisicamente da un gradino all’altro e da un cerchio all’altro in base alle consegne.

Per un lungo periodo (anche per la durata della prima classe) non viene indicata la tacca dello 0 sulla linea che viene solitamente usata in attività con consegne del tipo:

- Posiziona il numero… sulla linea
- Colora la parte della linea con i numeri maggiori di… (o minori di…, o compresi tra… e …)

- Linea dei numeri con finestra scorrevole[7]
    - Se la finestra è sul…qual è il precedente e quale il successivo?
    - Se ho nella finestra il numero … (cioè se parto dal numero …) dove arrivo se sposto la finestra in avanti/indietro di …?
    - Sei su un numero e vedi il numero … proprio davanti a te, su che numero sei?
- Giochi dei cerchi (software[8])
    - Chiama i bambini in ordine crescente/decrescente,
    - Clicca sul cerchio dove deve entrare il bambino (ordinamento di numeri in codice arabo),
    - Clicca sul bambino che deve entrare nel cerchio rosso (posizionamento di numeri arabi nella sequenza dei numeri),
    - Metti al posto giusto il bambino con il numero chiamato,
    - Chi c'è in mezzo?
    - Chi c'è davanti?
    - Chi c'è dietro?
- Avanti e indietro sulla linea (software)
    - Jimmy è sul numero …. Il numero … è davanti o dietro a lui?
    - Jimmy è sul numero …. Ha appena fatto … salti indietro/in avanti. Su che numero era prima?

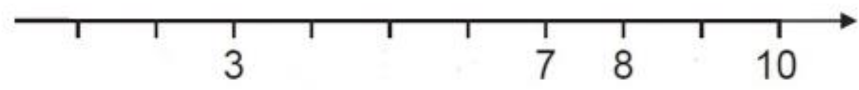
[7] S'intende la finestra scorrevole che proponiamo di costruire sulle linee dei numeri di classe e individuale.

[8] Questo e i due software sottoelencati sono stati sviluppati da Ivana Sacchi per il progetto PerContare. Nei software per relazioni ordinali tra i numeri in cui è rappresentata la linea continua, i trattini sono sulla parte superiore in modo da poter posizionare i personaggi sopra i numeri scritti in codice arabo.

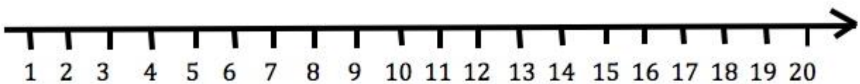
- Problemi sulla linea (software)
    - Gino è sul numero successivo a quello di Betta che è sul …. Su quali numeri sono i coniglietti?
    - Betta e Gino sono a distanza di … numeri. Gino, che è sul …, è sul numero maggiore. Dove sono i coniglietti?
    - Betta è tra Gino e Osvaldo che sono sui numeri … e …. Osvaldo è sul numero minore. Dove sono i coniglietti?

Di seguito riportiamo degli esempi di rappresentazione della linea dei numeri usata in alcune delle consegne elencate sopra.

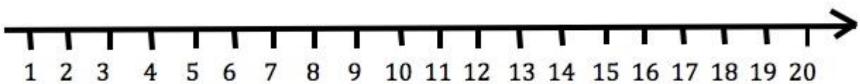
DOV'È IL NUMERO 4?



COLORA LA PARTE DELLA LINEA CHE CONTIENE TUTTI I NUMERI MAGGIORI DI 9.



COLORA LA PARTE DELLA LINEA CHE CONTIENE TUTTI I NUMERI MAGGIORI DI 4 E MINORI DI 10 .



LINEA DEI NUMERI CON FINESTRA SCORREVOLE

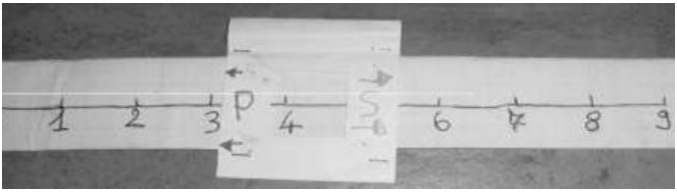


Figura 3: Costruzione della linea dei numeri con finestra scorrevole. La finestra è stata fatta scorrere fino al 4 e alla sua destra la “S” copre il numero successivo rispetto a 4.

Consegne orali:
Se c’è il 7 nella finestra, qual è il numero precedente e quale il successivo?
Se ho nella finestra il numero 6 (cioè se parto dal numero 6) dove arrivo se sposto la finestra in avanti di 2?
Se ho nella finestra il numero 5 (cioè se parto dal numero 5) dove arrivo se sposto la finestra indietro di 1?
Come devo spostare la finestra se parto dal numero 10 e voglio arrivare al numero 6?

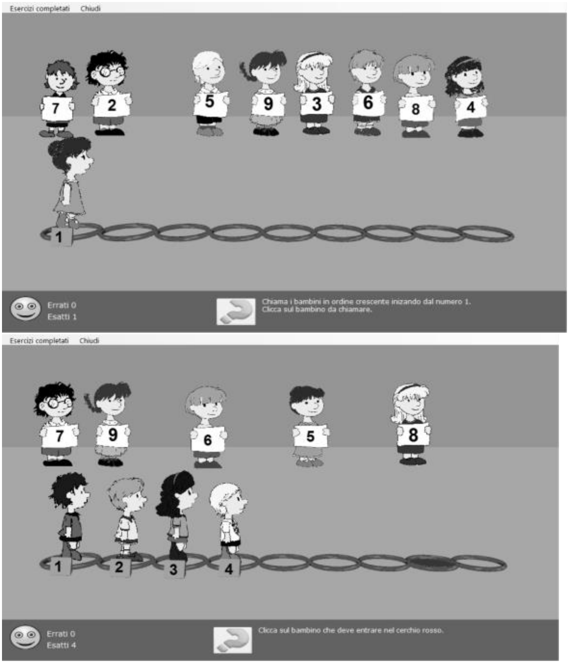


Figura 4 (a e b): schermate dal software "giochi con i cerchi" in cui le consegne sono rispettivamente: a) chiama i bambini in ordine crescente, e b) clicca sul bambino che deve entrare nel cerchio rosso.

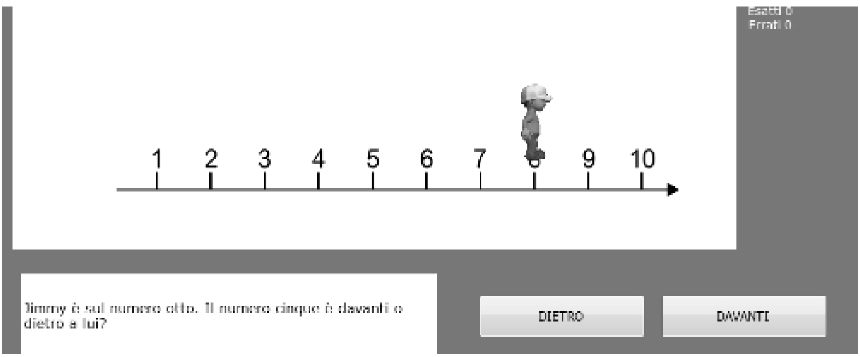


Figura 5: rappresentazione della linea dei numeri nel software "avanti e indietro sulla linea dei numeri". La schermata mostra

la consegna "Jimmy è sul numero otto. Il numero cinque è davanti o dietro a lui?" e l'utente ha già posizionato Jimmy sull'otto.

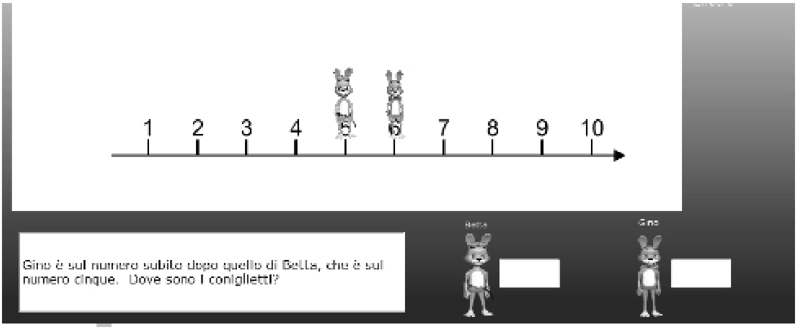


Figura 6: rappresentazione della linea dei numeri nel software "problemi sulla linea dei numeri". La schermata nostra la consegna: "Gino è sul numero subito dopo quello di Betta, che è sul numero cinque. Dove sono i coniglietti?" L'utente ha posizionato i coniglietti su due numeri della linea.

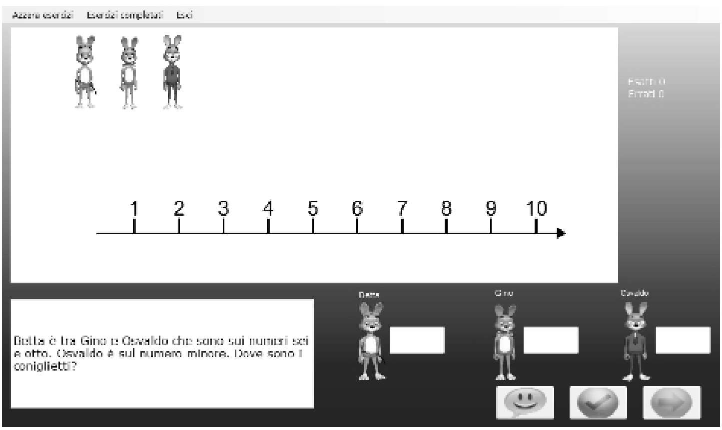


Figura 7: rappresentazione della linea dei numeri nel software "problemi sulla linea dei numeri". La schermata nostra la consegna: "Betta è tra Gino e Osvaldo che sono sui numeri sei e otto. Osvaldo è sul numero minore. Dove sono i coniglietti?

5. Addizione e sottrazione sulla linea dei numeri

Inoltre, la linea dei numeri è adatta per svolgere, non solo le operazioni di calcolo entro il 10 (che, peraltro, si possono fare con le dita), ma soprattutto oltre il 10, quando le dita non sono più sufficienti e il bambino può commettere errori poiché la configurazione delle dita non ha lo stesso significato numerico (per esempio 8 e 13 con le dita corrispondono alla stessa configurazione).

Con la linea dei numeri la rappresentazione dell'addizione risulta molto semplice in quanto si realizza mettendo in sequenza i due addendi, così come prevede il "Modello del conteggio totale" (Groen e Parkman, 1972): ad esempio per fare 3+5 il bambino conta: "uno, due, tre", poi riparte a contare per il secondo addendo "uno, due, tre, quattro, cinque" e infine riconta tutto fino ad arrivare al totale di otto. Un buon uso della linea dei numeri in compiti di addizione favorisce anche lo sviluppo del passaggio al modello di conteggio più evoluto, il modello "a partire da": ossia contare in avanti a partire dal primo addendo. I bambini scoprono che non è necessario partire dal primo addendo, ma che si può partire dal secondo: partono da 3 e contano poi in avanti per altri 5 per arrivare al risultato.

La linea dei numeri può inoltre facilitare la realizzazione di una procedura per la sottrazione e quindi anche la sua concettualizzazione (Karmiloff-Smith, 1992). Davanti ad una sottrazione scritta, infatti, il bambino spesso ha difficoltà a considerare che il secondo numerale deve essere tolto e non aggiunto al primo. L'uso della linea dei numeri favorisce l'operazionalizzazione della sottrazione in quanto per il bambino è più facile capire che con il segno + si "va in avanti" mentre con il segno – si "va indietro". Non vi è dunque la necessità di capire fin dall'inizio che il sottraendo è contenuto nel minuendo. Inoltre, se il bambino ha difficoltà con le convenzioni dell'andare "avanti" (da sinistra a destra) e "indietro" (da destra a sinistra), è possibile

disporre la linea dei numeri in verticale in modo che i numeri crescano andando vero l'alto anziché verso destra.
Il modello della linea dei numeri per addizione e sottrazione proposta nel progetto PerContare prende spunto dal modello di Ridescrizione Rappresentazionale (RR) di Karmiloff-Smith (1992) sullo sviluppo delle capacità di conteggio. Secondo questo modello, il bambino in età prescolare deve assimilare la procedura del conteggio in modo che diventi automatica; infatti, egli è in grado di contare agevolmente fino a 5, ma deve sempre ricontare daccapo la stessa configurazione di cose in quanto ancora non ha sviluppato il principio di cardinalità. Il bambino, quindi, segue una procedura integralmente ed è in grado di usarla con successo in determinate circostanze, tuttavia la conoscenza intrinseca nella procedura non è ancora manipolabile nelle sue componenti separate e per questo ricomincia ogni volta a contare anche quando il compito riguarda lo stesso insieme appena contato. Il modello di RR postula che partendo dall'immagazzinamento della procedura (dopo un determinato numero di esperienze che varia da bambino a bambino) si possa giungere ad una rappresentazione astratta e mettere in relazione tra loro diverse procedure che hanno uno stesso obiettivo come risultato (Baccaglini-Frank e Scorza, 2013).

In attività di addizione e sottrazione sulla linea dei numeri (anche a livello informale come nel gioco dell'oca), a differenza che nel caso della linea dei numeri per mediare l'ordinalità dei numeri, serve un segnaposto come "posizione di partenza".
Già dalla scuola dell'infanzia le prime attività di calcolo informale sulla linea dei numeri possono essere realizzate con un gioco dell'oca. La linea dei numeri può bene essere rappresentata come sequenza di celle quadrate (un gioco dell'oca stilizzato) con anche la casella di partenza, facilitando in questo modo il posizionamento delle pedine "sopra" un certo numero. Da esperienze di attività con i bambini, infatti, sono state osservate difficoltà quando non era presente questa "posizione di partenza". Nel gioco dell'oca classico

(nella figura è riprodotta una versione del 1598[9]) le caselle numerate partono da 1.

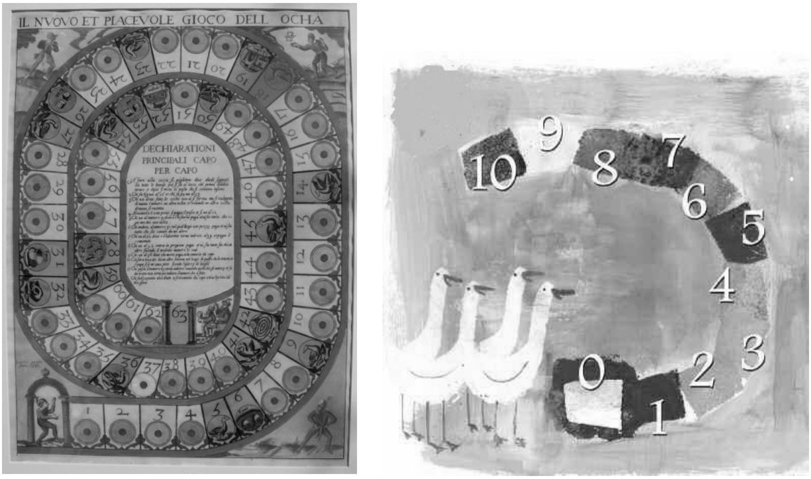


Figura 8 (a e b): versioni del Gioco dell'Oca. A sinistra a) una versione del 1598, in cui la partenza è una casella con il buffone sotto l'arco, e a destra b) una versione moderna in cui la casella di partenza è indicata con "0".

Se le insegnanti propongono giochi dell'oca da tavolo o disegnati sul pavimento e rappresentano solo le caselle da 1 in poi, nasce subito un'ambiguità. I bambini, distratti dalla regolarità della sequenza di caselle, pongono i segnaposto (o se stessi nel caso dei grandi giochi dell'oca disegnati per terra) nella prima casella. Dunque, al lancio del dado, se si ottiene 4, si inizia a contare da 1 e si arriva sulla casella 5. È preferibile disegnare sempre una casella di partenza (rappresentata dal buffone sotto l'arco nel gioco antico), che, col tempo, potrà essere numerata come "zero".

[9] http://www.giochidelloca.it/index.php

Dunque le attività del progetto propongono la marcatura della tacca-zero con un segno a forma di "ciambella grossa" che ricorda il simbolo del codice arabo per lo zero, ma che a colpo d'occhio appare diverso dai simboli per gli altri numeri. Inoltre la tacca è dalla parte opposta della linea in modo da facilitare processi di conteggio sulla linea, se necessari per lo svolgimento del calcolo. In questo modo si possono affrontare attività di calcolo sulla linea dei numeri e proporre il significato di zero come "punto di partenza". A questo significato può essere eventualmente, quando i bambini sono in grado di gestirlo (in generale i bambini maturano con tempi differenti), associato il significato di "nessun dito sollevato" o in generale di "nessun oggetto" mettendo in relazione procedure per la sottrazione sulla linea dei numeri che terminano al punto di partenza e con le dita o con altri oggetti (p.e. le cannucce) quando da una numerosità si tolgono tutti gli elementi che la compongono, lasciando "nessun oggetto".

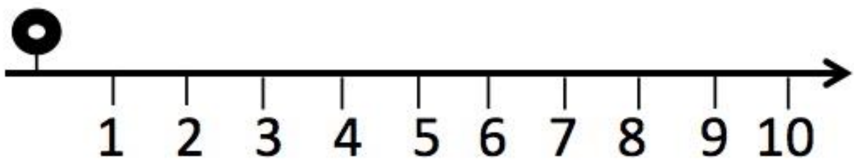


Figura 9: rappresentazione della linea dei numeri per attività che hanno come obiettivo didattico l'apprendimento di procedure per l'addizione e la sottrazione sulla linea dei numeri.

Ci teniamo a sottolineare che durante una prima fase del calcolo (entro il dieci) vengono proposte le mani come strumento ausiliario, che deve sempre accompagnare il bambino nell'apprendimento dei fatti aritmetici fino a quando decide spontaneamente di abbandonarle. Dunque, anche nei software sviluppati all'interno del progetto per esercitarsi con il calcolo, c'è un sotto-ambiente che consente di operare su delle mani virtuali cliccando su un dito alla volta oppure sul palmo della mano per alzare o abbassare tutte le dita simultaneamente. Questo artefatto virtuale sfrutta la rappresentazione “tutte le dita abbassate” o “nessun dito alzato” per il significato di “0” come quantità nulla (già introdotto a questo punto).

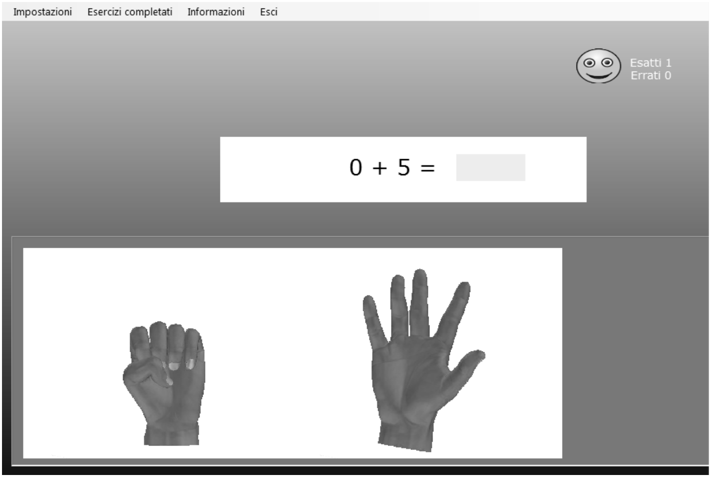


Figura 10: mani virtuali nel software “Calcolo Mentale” che vengono utilizzate dall’utente, nel caso in cui non riesca a calcolare a mente il risultato, per svolgere il calcolo 0+5.

7. La notazione posizionale decimale

L’ultimo ambito in cui affrontiamo, necessariamente, l’uso dello zero è quello della scrittura dei numeri nel codice arabo. Il passaggio alla notazione posizionale è molto delicato, in quanto la gestione degli aspetti sintattici della letto-scrittura dei numeri con tanti zeri risulta particolarmente pesante ed è fonte di numerosi errori, come sottolineato nell’introduzione. Nel progetto PerContare cerchiamo di mantenere forte un aspetto semantico del numero (anche “grande”, circa tra 10 e 100) anche quando viene rappresentato, o si chiede di rappresentarlo, in codice arabo. Infatti non riteniamo che l’uso di un artefatto come l’abaco possa essere d'aiuto in una prima fase di esposizione alla notazione posizionale[10].

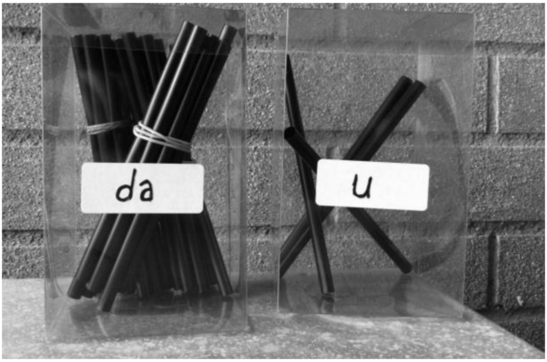


Figura 11: modello delle cannucce nelle scatole trasparenti. In questo caso è rappresentato il numero 34 e non ci sono da svolgere operazioni di legare fascetti di cannucce sparse, in quanto ce ne sono meno di 10 nella scatola di destra.

In alternativa, proponiamo l'uso di scatole trasparenti in cui porre cannucce sparse (nella scatola di destra) e fascetti di dieci cannucce (nella scatola di sinistra)[11]. Il modello funziona così: si può porre qualsiasi numero di cannucce sparse nella scatola corrispondente, a patto che, in un secondo momento, vengano legate con un elastico e depositate nella scatola di sinistra tutti i fascetti di dieci cannucce che si possono formare. A questo punto una numerosità di cannucce (effettiva) può essere "letta" in tre modi:

1) contando le singole cannucce,

---

[10] Questa ipotesi è stata confermata durante molto lavoro anche individuale con bambini in difficoltà.

[11] Eventualmente si potranno porre sulle scatole le etichette convenzionali "da" e "u", per rispettivamente la scatola dei fascetti (decine) e delle cannucce sparse (unità).

2) contando velocemente le cannucce, considerando i fascetti e le cannucce sparse,
3) contando soltanto il numero di fascetti e il numeri di cannucce sparse e leggendo un numero a due cifre.

Quando si hanno situazioni in cui tutte le cannucce sono in fascetti, si è in presenza di numeri che contengono “0” come seconda cifra. Eventualmente si può passare ad una rappresentazione più astratta dei numeri a più cifre, come quella dell’abaco, ed estendere le posizioni (il corrispondente di nuove scatole a sinistra, o di nuove aste) per includere centinaia ed eventualmente migliaia. In questo modo si potranno rappresentare numeri che contengono “0” tra le cifre che li compongono, e imparare a leggere correttamente questi numeri, usando in modo appropriato lo “0” nella sintassi dei numeri a più cifre.

8. Conclusione

I numeri possono essere rappresentati in molti modi diversi ed è bene usare la/le rappresentazioni che meglio si adattano al particolare aspetto del numero che si vuole trattare. C’è un rischio, tuttavia, nell’usare troppe rappresentazioni difficili da mettere in relazione tra loro, perché soprattutto i bambini con difficoltà potrebbero essere sopraffatti e confusi dalla molteplicità di rappresentazioni anziché agevolati. È bene perciò avere chiari i propri obiettivi didattici quando si propone una certa rappresentazione per mediare un particolare significato matematico. All’interno del progetto PerContare diverse rappresentazioni sono proposte e suggerite agli insegnanti direttamente nelle attività progettate. In questo contributo abbiamo voluto sottolineare come viene affrontata l’introduzione dello zero nelle prime classi della scuola primaria, con particolare attenzione alle rappresentazioni utilizzate.

Seppure lo “0” venga scritto per la prima volta all’interno del numero “10” che rappresenta le dieci dita o un fascetto di dieci cannucce legate con un elastico, non viene trattato come “oggetto di per sé" fino all'introduzione del calcolo (anche informale) sulla linea dei numeri. Tutte le prime rappresentazioni della sequenza dei numeri usati per contare, e delle loro relazioni ordinali su linee dei numeri a tacche evitano l'introduzione dello zero. Abbiamo ritenuto importante, invece, aggiungere una tacca con un segno, che eventualmente assumerà significati dello zero, sulla linea dei numeri usata nelle attività (anche informali) di calcolo, in quanto senza una posizione "di partenza" vi è il rischio di errore e non avrebbero possibilità di essere rappresentate situazioni descrivibili con operazioni del tipo $n\text{-}n=0$ (p.e. quando si fa *strike* nel gioco dei birilli). Proprio a partire da questa strana "posizione di partenza" si cominciano a costruire il significato di zero come quantità nulla o "non-considerazione di oggetti che prima erano stati considerati" (p.e., "nessun dito alzato", o "nessun oggetto rimasto").

È possibile a questo punto dare un nome a questa "posizione particolare" che ora ha dei primi significati. Usiamo il nome convenzionale "zero" e la notazione "0" che ora può essere riconosciuta anche come cifra usata per comporre numeri come "10" o "20" e la si può usare con significato appropriato per descrivere situazioni come quelle proposte con le cannucce e i fascetti nelle scatole trasparenti, ed eventualmente con l'abaco[12] per sviluppare consapevolezza e competenza nell'uso della notazione posizionale decimale.

Sottolineiamo, infine, che una traiettoria didattica come quella proposta per l'introduzione dello zero è comunque *teorica* e dev'essere adattata ad ogni contesto reale di classe. All'interno del progetto PerContare ci sono state classi in cui non è stato necessario lavorare a fondo su ogni passaggio della traiettoria in quanto i bambini apparivano tutti a loro agio con diversi significati dello zero fin dai primi mesi di scuola e hanno velocemente interiorizzato i nuovi significati, arrivando a gestire in maniera competente lo zero come quantità nulla, come tacca sulla linea dei numeri (punto

[12] o con il *b.abaco* (Bianchin e Baccaglini-Frank, in corso di stampa) nel caso delle classi del progetto in cui l'abaco è stato sostituito con questo artefatto.

di partenza per il calcolo e numero che precede l'1), e come cifra importante nella sintassi dei numeri a più cifre, passando senza difficoltà da un significato all'altro. In altre classi, invece, ci si è dovuti soffermare a lungo su particolari rappresentazioni e passaggi dall'uno all'altra.

Ringraziamenti

Ringrazio M.G Bartolini Bussi, G. Stella, A. Biancardi, supervisori scientifici del progetto PerContare, oltre che P. Angelucci e P. Cecchini per i loro interessanti suggerimenti e le loro revisioni dell'articolo. Inoltre ringrazio di cuore le insegnanti sperimentatrici e i bambini che ci hanno aiutato a mettere a punto le buone pratiche didattiche proposte all'interno del progetto.

Bibliografia

Baccaglini-Frank A., e Robotti E. (2013). Gestire gli Studenti con DSA in Classe Alcuni Elementi di un Quadro Comune. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, e P. Vighi, *Quaderni GRIMeD n. 1*, 75-86. ISBN 8837118813.

Baccaglini-Frank A., e Scorza M. (2013). Gestire gli studenti con DSA in classe uso delle mani e della linea dei numeri nel progetto PerContare. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, e P. Vighi, *Quaderni GRIMeD n. 1*, 183-190. ISBN 8837118813.

Bartolini Bussi M.G. e Mariotti M.A., (2009), Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 32, A-B*, 269-294.

Biancardi A. e Lucangeli D. (2010). Il trattamento dei disturbi e delle difficoltà di calcolo. In D. Lucangeli D. e I.C. Mammarella, *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento*. Milano: Franco Angeli.

Biancardi A., Mariani E. e Pieretti M. (2011). *La discalculia evolutiva. Dai modelli neuropsicologici alla riabilitazione*. Milano: Franco Angeli.

Bianchin B. e Baccaglini-Frank A. (in corso di stampa). Il b.abaco: analisi cognitiva di uno strumento fra l'abaco ed il suan pan cinese. In S. Sbaragli (Ed.) atti del *Convegno Nazionale n. 27: Incontri con la*

Matematica La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula. Castel San Pietro Terme, Novembre 2013.

Brysbaert M. (1995). Arabic number reading: On the nature of the numerical scale and the origin of phonological reading. *Journal of Experimental Psychology: General, 124*, 343-447.

Butterworth B. (1999). *The mathematical brain,* London: Macmillan.

Butterworth B. (2005). The development of arithmetical abilities, *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*, 3-18.

de Hevia M. D., Vallar G., & Girelli L. (2008). Visualizing numbers in the mind's eye: the role of visuo-spatial processes in numerical abilities. *Neurosci Biobehav Rev, 32*(8), 1361-1372.

Dehaene S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*, 1-42.

Dehaene S. (2001). Subtracting Pigeons: Logarithmic or Linear?. *Psychological Science, 12*, 244-246.

Dehaene S. (2010). *Il pallino della matematica*, *Scoprire il genio dei numeri che è in noi.* Milano: Raffaello Cortina Editore.

Dehaene S., Bossini S., & Giraux P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General, 122*, 371-396.

Fayol M., & Seron X. (2005). About Numerical Representations. Insights from Neuropsychological, Experimental, and Developmental Studies. In J.I.D. Campbell (Ed.), *The Handbook of Mathematical Cognition*. New York: Psychology Press.

Gelman R., & Gallistel C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*, Boston: Harvard University Press.

Granà A., Lochy A., Girelli L., Seron X., & Semenza C. (2003). Transcoding zero within complex numerals. *Neuropsychologia*.

Groen G.J. & Parkman J.M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*, 329-343.

Karmiloff-Smith A. (1992). *Beyond Modularity. A Developmental Perspective on Cognitive Science*, Cambridge, Mass.: The MIT Press.

Hubbard E. M., Piazza M., Pinel P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nat Rev Neurosci, 6*(6), 435-448.

Hughes M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning*. New York: Basic Blackwell.

Ianniti A. e Lucangeli D. (2005). Perché i calcoli sono difficili? Ipotesi e modelli psicologici dell'abilità di calcolo. *Difficoltà in Matematica, 1*(2), 153-170.

Lucangeli D. (2005). *National survey on learning disabilities.* Rome: Italian Institute of Research on Infancy.

Lochy A., Pillon A., Zesiger P. & Seron X. (2002). Verbal structure of numerals and digits in handwriting: New evidence from kinematics. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 55A*, 263-288.

Lucangeli D. (2012). *La discalculia e le difficoltà in aritmetica*. Firenze: Giunti Scuola.

Okamoto Y. & Case R. (1996). Exploring the Microstructure of Children's Conceptual Structures in the Domain of Number. In R. Case & Okamoto Y. (Eds.), *The Role of Central Conceptual Structures in the Developments of Children's Thought, Monographs of the Society for Research in Child Development, vol. 1-2,* Blackwell, Malden.

Pinel P., Piazza M., Le Bihan D. & Dehaene S. (2004). Distributed and overlapping cerebral representation of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron, 41(6),* 983-993.

Ramploud A. Baccaglini-Frank A., e Bartolini Bussi M.G. (in corso di stampa). *Aritmetica in pratica*. Edizioni Erickson.

Seron X., Pesenti M., Noël M.P., Deloche G. & Cornet J.A. (1992). Images of numbers or when 98 is upper left and 6 sky blue. *Cognition, 44*, 159-196.

Vygotsky L.S. (1987). *Il processo cognitivo*. Torino: Boringhieri.

Wellman H.M., & Miller K.F. (1986). Thinking about nothing: Development of concept of zero. *British Journal of Developmental Psychology, 4*, 31-42.

Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica – Osservare, interpretare, intervenire.* Springer.

Zorzi M., Priftis K. & Umiltà C. (2002). Neglect disrupts the mental number line. *Nature, 417*, 138-139.